KEY POINTS

NAME/DATE/SUBJECT

1. 常微分方程的概念

NOTES

· 常微分方程

· $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$

$\frac{d^2y}{dx^2}+\phi(x)\frac{dy}{dx}+g(x)y=f(x)$

· 一般地: (*) $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ n阶常微分方程

· 线性方程:

$\frac{dy}{dx}+f(x)y=0$ 一阶齐次线性方程

$\frac{dy}{dx}+f(x)y=g(x)$ 一阶非齐次线性方程

$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$ 二阶齐次线性方程

$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f(x)$ 二阶非齐次线性方程

定义: 1) 若$\varphi(x)$在$(a,b)$上n阶可导, 且$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$, 且称$y=\varphi(x)$为(*)在$(a,b)$上的一个解, 曲线$y=\varphi(x)$称为积分曲线

2) $\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$为(*)的解, 且$C_1,C_2,\cdots,C_n$相互独立的n个常数, 则称$\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$为(*)的通解.

3) 不含常数的解为特解.

SUMMARY

KEY POINTS

NAME/DATE/SUBJECT

# 2. 一阶常微分方程

NOTES

· 一阶方程的初等积分法

1. 变量可分离方程

$\frac{dy}{dx}=g(x)\cdot h(y)$ 称为变量可分离方程

令 $h(y)\neq 0$ 则 $\frac{dy}{h(y)}=g(x)dx$

$\int\frac{1}{h(y)}dy=\int g(x)dx$

若 $h(y_0)=0$，则 $y=y_0$ 也为解

2. 线性方程

$\frac{dy}{dx}+f(x)y=0 \Rightarrow \int\frac{1}{y}dy=-\int f(x)dx$

$y=Ce^{-\int f(x)dx}$ $(C\neq 0)$

又有解 $y_0=C$，则通解为 $y=Ce^{-\int f(x)dx}$

3. 非齐次线性方程

$\frac{dy}{dx}+f(x)y=g(x)$

常数变易法：$y=C(x)e^{-\int f(x)dx}$

代入非齐次方程：$C'(x)e^{-\int f(x)dx}-f(x)C(x)e^{-\int f(x)dx}+f(x)C(x)e^{-\int f(x)dx}=g(x)$

$\Rightarrow C'(x)=g(x)e^{\int f(x)dx} \Rightarrow C(x)=C+\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx$

$\Rightarrow y=e^{-\int f(x)dx}\left(C+\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx\right)$ 其中C为任意常数

4. Bernaulli方程

$\frac{dy}{dx}+f(x)y=g(x)\cdot y^n$

当 $n=0,1$ 时，为线性方程

当 $n>0$ 且 $n\neq 1$ 时，$y=0$ 为解

令 $y\neq 0$，$\frac{1}{1-n}\frac{dy^{1-n}}{dx}+f(x)y^{1-n}=g(x)$

令 $u=y^{1-n} \Rightarrow \frac{du}{dx}+(1-n)f(x)u=(1-n)g(x)$

SUMMARY

KEY POINTS

NAME/DATE/SUBJECT

# 2. 一阶常微分方程

NOTES

## 5. 齐次方程

1) $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，其中 $f(\tau x,\tau y)=f(x,y)$，$\forall \tau\neq 0$

2) $\frac{dy}{dx}=f(ax+by)$，其中 $a,b\neq 0$

令 $u=ax+by \Rightarrow \frac{du}{dx}=a+bf(u)$

3) $\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$

当 $(a_1,b_1)\,/\!/\,(a_2,b_2)$ 时，即2)

当 $(a_1,b_1)\,\not\parallel\,(a_2,b_2)$ 时，$c_1=c_2=0$ 即1)

$c_1,c_2$ 不全为零，$\begin{cases} a_1x^*+b_1y^*=c_1 \\ a_2x^*+b_2y^*=c_2 \end{cases}$

则 $\frac{d(y+y^*)}{d(x+x^*)}=\frac{a(x+x^*)+b_1(y+y^*)}{a_2(x+x^*)+b_2(y+y^*)} \Rightarrow \frac{d\hat{x}}{d\hat{y}}=\frac{a_1\hat{x}+b_1\hat{y}}{a_2\hat{x}+b_2\hat{y}}$

## 6. 全微分方程：

(1) $f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$

若存在 $u(x,y)$ 使得 $du=f(x,y)dx+g(x,y)dy$，

则称(1)为全微分方程，此时，方程(1)有通积分 $u(x,y)=C$

其中 $C$ 为任意常数

(1)为全微分方程 $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$

(2) 若 $f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$ 不为全微分方程，

而 $\mu(x,y)f(x,y)dx+\mu(x,y)g(x,y)dy=0$ 为全微分方程，则 $\mu(x,y)$ 称为(1)的积分因子

· $d(xy)=ydx+xdy$

$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2}$

$d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$d\left(\ln(x^2+y^2)\right)=2\cdot\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$

$d\left(\arctan\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$

· 非齐次通解 = 齐次通解 + 非齐次特解

SUMMARY

KEY POINTS

NAME/DATE/SUBJECT

# 3. 线性方程解的结构与求解

NOTES

## 1. 线性方程的结构

(1) $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$

(2) $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$

· 定理1:

① 设 $y_1(x),y_2(x)$ 为齐次方程(1)在$(a,b)$上的两个解，则$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$也为齐次方程(1)在$(a,b)$上的解，其中$C_1,C_2$为任意常数

② 设$y(x)$为齐次方程(1)在$(a,b)$上的任一解，$y^*(x)$为非齐次方程(2)在$(a,b)$上的任一解，则$y(x)+y^*(x)$也为非齐次方程(2)在$(a,b)$上的一个解.

③ 非齐次方程(2)在$(a,b)$上任两个解的差，为齐次方程(1)在$(a,b)$上的一个解

· 定义: 设$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是区间I上的m个函数，若存在m个不全为零的常数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_my_m(x)\equiv 0$, $x\in I$，则称这m个函数线性相关，否则称为线性无关

· 定义: 设$y_1(x),y_2(x)$都在区间I上可导, $W[y_1,y_2](x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}$，称为$y_1(x),y_2(x)$在I上的Wronsky行列式

· 定理2: 设$y_1(x),y_2(x)$为齐次方程(1)在$(a,b)$上的任意两个解，则它们的Wronsky行列式

$$W[y_1,y_2](x)=W[y_1,y_2](x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\quad x\in(a,b)$$

，其中$a_0\in(a,b)$为一定点 (Liouville公式)

· 推论: 设$y_1(x),y_2(x)$为齐次方程(1)在$(a,b)$上的两个解，则它们的Wronsky行列式在$(a,b)$上要么恒等于零，要么恒不等于零

· 定理3: 齐次方程(1)在$(a,b)$上存在两个线性无关的解$y_1(x),y_2(x)$，此时，$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$表示了齐次方程(1)的所有解. 其中$C_1,C_2$为任意常数.

· 推论: 条件同上，$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$为齐次方程(1)的通解.

· 定理4(叠加原理): 设$y_1(x),y_2(x)$分别为$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x) \\ y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)\end{cases}$上的解

则$y_1(x)+y_2(x)$为$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$在$(a,b)$上的解.

SUMMARY

KEY POINTS

NAME/DATE/SUBJECT

3. 线性方程解的结构与求解

NOTES

2.常系数齐次线性方程

Euler公式：$e^{a+bi}=e^{a}(\cos b+i\sin b)$

(1) $y''+py'+qy=0$ 寻找 $e^{\lambda x}$ 型的解，$(\lambda^2+p\lambda+q)e^{\lambda x}=0$

则 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 称为方程(1)的特征根

· 当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 为实根：$C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$

· 当 $\lambda_1=\lambda_2$ 为二重实根：$(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}$

· 当 $\lambda_{1,2}=a\pm bi$，其中 $b\neq0$：$C_1a^{ax}\cos bx+C_2e^{ax}\sin bx$

3. 常系数非齐次线性方程

1) 非齐次项为特殊的函数

| 非齐次项 | 非齐次方程的特解 $y^*(x)$ |
| --- | --- |
| $U_n(x)e^{\lambda^* x}$，其中 $U_n(x)$ 为n次多项式 $\lambda^*$ 为K重特征根，$(k=0,1,2,\cdots)$ | $x^kV_n(x)e^{\lambda^* x}$ 其中 $V_n(x)$ 为待定的n次多项式 |
| $U_n(x)e^{ax}\cos bx$ 或 $U_n(x)e^{ax}\sin bx$ 其中 $U_n(x)$ 为n次多项式 $a\pm bi$ 为K重特征根 $(k=0,1,2,\cdots)$ | $x^ke^{ax}[V_n(x)\cos bx+\tilde{V}_n(x)\sin bx]$ 或同类型，其中 $V_n(x)$，$\tilde{V}_n(x)$ 都为待定的n次多项式 |

2) 常系数变易法：

设方程(1)有通解

$$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$$

令 $y^*=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$

$$y^{*\prime}=\underbrace{\boxed{C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)}}_{=0}+C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)$$

$$y^{*\prime\prime}=C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)$$

$$=C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x)$$

$$\begin{cases}y_1(x)C_1'(x)+y_2(x)C_2'(x)=0\\ y_1'(x)C_1'(x)+y_2'(x)C_2'(x)=f(x)\end{cases}\Rightarrow$$ 解得 $C_1'(x)$，$C_2'(x)$ 积分得(2)的通解 $y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$

SUMMARY

KEY POINTS

NAME/DATE/SUBJECT

3. 线性方程解的结构与求解

NOTES

## 4. 变系数线性方程

### 1) Euler方程

$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+p_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}x\frac{dy}{dx}+p_ny=f(x)$ 为Euler方程

当$x>0$时，令$x=e^t$ $(\frac{dx}{dt}=x)$

则 $x\frac{dy}{dx}=x\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=x\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}=\frac{dy}{dt}$

$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=x^2\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=x^2\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt})=x^2(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx})$

$=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$

$x^3\frac{d^3y}{dx^3}=x^3\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}))=\cdots$

当$x<0$时，令$x=e^{-t}$ $(\frac{dx}{dt}=x)$，上述变换仍然成立

### 2) Liouville公式的应用

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ (1)

若方程(1)在$(a,b)$上有一个恒不等于零的解$y_1(x)$，对(1)的任意解$y_1(x)$，对(1)的任意解$y(x)$，由Liouville公式

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y(x_0) \\ y_1'(x_0) & y'(x_0) \end{vmatrix}e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$$

其中$x_0\in(a,b)$为一固定点上

$y'(x)-\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}=\frac{C}{y_1(x)}e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$

$\Rightarrow y(x)=e^{\int_{x_0}^{x}\frac{y_1'(t)}{y_1(t)}}(C_1+\int_{x_0}^{x}\frac{C}{y_1(s)}e^{-\int_{s_0}^{s}p(t)dt}ds)=C_1y_1(x)+C_2y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{1}{y_1(s)}e^{-\int_{s_0}^{s}p(t)dt}ds$

### 3) 常系数变易法

$y''+p(x)y'+q(x)=f(x)$ (2)

若相应齐次方程(1)有一非零解$y_1(x)$，令$y=C_1(x)y_1(x)$，代入方程(2)，化为

$y_1(x)C''(x)+(2y_1'(x)+p(x)y_1(x))C'(x)=f(x)$

再令$u(x)=C'(x)$，$y_1(x)u'+(2y_1'(x)+p(x)y_1(x))u=f(x)$

有通解 $u=h(x,C)$ $C'(x)=h(x,C)$

积分得：$C(x)=g(x,C_1,C_2)$

则(2)有通解：$y=g(x,C_1,C_2)y_1(x)$

SUMMARY

KEY POINTS

NAME/DATE/SUBJECT

# 4. 高阶方程

NOTES

I. $F(x, y^{(n)})=0$

1) $y^{(n)}=f(x)$

2) 参数形式：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y^{(n)}=\psi(t) \end{cases}$

II $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)})=0$

特点：不显含 $y$

令 $y^{(k)}=p$，方程降阶为 $n-k$ 阶方程 $F(x, p, p', \cdots, p^{(n-k)})=0$

III. $F(y, y', \cdots y^{(n)})=0$

特点：不显含自变量 $x$，

取 $y$ 为(新的)自变量，令 $p=y'$，$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=p\frac{dp}{dy}$ ⋯

原方程化为 $F(y, p, \frac{dp}{dy}, \cdots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}})=0$

SUMMARY